

О. І. Матяш,кандидат педагогічних наук, доцент,
завідувач кафедри алгебри і методики викладання математики
(Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського);**А. В. Прус,**кандидат педагогічних наук, доцент
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)**ОКРЕМІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ**

У статті досліджено окремі питання навчальної діяльності студентів на заняттях із методики навчання математики, які пов'язані з формуванням понять. Запропоновано засоби для набуття студентами вмінь та навичок формувати математичні поняття в учнів. Серед них такі: проведення відповідних дидактичних ігор, написання знаково-символічних конспектів, розв'язування методичних задач, які пов'язані із методикою формування конкретних понять шкільних курсів алгебри, геометрії.

Математичні поняття, методика формування понять – це важливий змістовий модуль, освоєння якого разом з педагогічною практикою забезпечує оволодіння окремими типами діяльності, які є важливими у професійній роботі майбутнього вчителя математики. Це визначено в галузевому стандарті вищої освіти (стандарт поширюється на вищі навчальні заклади, які готують фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр") [1: 64]. Питання методики формування математичних понять досліджувалось відомими науковцями, серед яких такі: О. М. Астряб, К. С. Барибін, Г. П. Бевз, В. М. Брадїс, Я. І. Груденов, П. М. Ерднїєв, Ю. М. Колягін, Н. О. Менчинська, Г. І. Саранцев, З. І. Слєпкань, Н. А. Тарасєнкова та ін. Вивченню відповідної методики формування математичних понять традиційно приділяється значна увага як на лекційних, так і на семінарських, лабораторних заняттях. Проте спілкування зі студентами, спостереження за ними під час навчального процесу (на заняттях, на педагогічній практиці), їх відповіді на екзаменах про формування математичних понять свідчать про наступне. Знання студентів щодо математичних понять та методики їх формування здебільшого носять формальний характер. Тобто більшість студентів вміє оперувати основними поняттями теми ("поняття", "зміст поняття", "обсяг поняття", "термін", "означення" тощо), знає структуру пізнавальної діяльності учнів щодо засвоєння математичних понять, до якої входять як загальні (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення тощо), так і специфічні розумові дії (дія підведення під поняття та дія виведення наслідків), перелічує етапи формування понять. Кращі студенти ілюструють теорію прикладами, в основному, тими, що звучали на лекції. Проте всі студенти відчують значні труднощі, якщо потрібно навести власні приклади зі шкільного курсу математики, наприклад, визначити зміст та обсяг певного поняття, виконати дію підведення під поняття чи розробити методику формування конкретного математичного поняття. Це можна пояснити тим, що студенти недооцінюють важливість методики формування понять для їх майбутньої діяльності. Вони вважають, що головне – це навчити учнів вирішувати математичні завдання, оскільки саме так найчастіше перевіряють математичні знання, вміння та навички у школі та після її закінчення. Звичайно, відразу хочеться їм заперечити: неможливо навчитись розв'язувати математичні задачі, якщо не знаєш і не розумієш суть того чи іншого математичного поняття! Цілком підтримуємо думку Н. О. Менчинської про те, що якщо учень справді засвоїв поняття, то він уміє його і застосовувати, зокрема, для розв'язування задач. Але до цього студенти повинні прийти самі в процесі спільної діяльності на заняттях із методики навчання математики. Як цього досягти? Пропонуємо розглянути доцільні, на наш погляд, засоби для набуття студентами вмінь та навичок формувати математичні поняття в учнів. Це і є метою нашої статті.

Важливим засобом досягнення визначеної мети є проведення дидактичних ділових ігор. Зупинимось на цьому детальніше. Завчасно ми пропонуємо студентам в якості самостійної контрольної роботи таке завдання: "Розробити методику формування поняття за схемою" (див. далі на рис. 1 схему, що запропонована Г. І. Саранцевим [2: 63]). Зазначимо, що таку самостійну контрольну роботу по формуванню понять ми проводимо у кожному із семестрів, протягом яких вивчається курс методики математики для бакалаврів. Список понять змінюється залежно від семестру. Так, у першому семестрі – це поняття, як вивчаються у першій ланці основної школи, у другому та третьому семестрах, відповідно, алгебраїчні та геометричні поняття основної школи (див. далі табл. 1). Причому під час виконання першої такої роботи поняття між студентами розподіляє викладач, згодом – обирають самі студенти. Для виконання цієї роботи визначаємо певний проміжок часу (як правило, це місяць).



Рис. 1. Етапи формування поняття

Таблиця 1.

Геометричні поняття основної школи (для самостійно контрольної роботи)

1. Висота паралелограма	10. Середня лінія трикутника	19. Вертикальні кути
2. Коло, вписане в трикутник	11. Медіана трикутника	20. Зовнішній кут трикутника
3. Кути внутрішні різносторонні і односторонні	12. Кут опуклого многокутника	21. Паралелограм
4. Відстань від точки до прямої	13. Коло, описане навколо трикутника	22. Круговий сектор
5. Круг	14. Ромб	23. Гомотетія
6. Перпендикулярні прямі	15. Кут	24. Рівнобедрений трикутник
7. Подібність фігур	16. Трикутник	25. Рівні трикутники
8. Площа	17. Довжина кола	26. Бісектриса трикутника
9. Круговий сегмент	18. Ламана	27. Висота трикутника

Протягом цього місяця проводимо лабораторні заняття, тема яких — формування математичних понять. Це ділові ігри: студенти у ролі вчителів (по черзі протягом 10-15 хвилин, залежно від

поняття) випробовують окремі етапи формування "свого поняття" на однокласниках, які виступають у ролі учнів. Після кожного такого виступу проводиться як самоаналіз виступаючим, так і аналіз будь-ким із присутніх. Слід підкреслити, що викладач теж бере участь в аналізі виступів. Завдяки чому студенти, аналізуючи, звертають увагу саме на принципові моменти у формуванні поняття. Тривалість виступів при цьому ми завжди контролюємо дуже чітко, оскільки є важливе правило: виступити за декілька відведених занять повинні всі. Звичайно, що приклад із створення методики формування поняття ми подаємо на лекції. Раніше ніж перейти до наступного засобу, підкреслимо наступне. Студентам завжди подобаються такі заняття, оскільки у грі вони ефективно набувають потрібні професійні якості: вчаться логічно, послідовно висловлювати свої думки, контролювати час під час "уроку", доброзичливо та толерантно подавати інформацію (зазначимо, що за домовленістю аналіз завжди починається із цікавих методичних знахідок того, хто поводить міні-урок, навіть якщо їх було мало або виступ не вдался). Ділові ігри незмінно викликають піднесений емоційний настрій у студентів, поживлення, що безперечно сприяє позитивній мотивації навчання.

Наступним засобом ми визначаємо створення студентами конспектів у знаково-символічній формі. З цією метою для самостійної роботи ми пропонуємо студентам перекодувати важливу інформацію із однієї форми в іншу. Наприклад, пропонуємо подати конспект основних тез теми "Математичні поняття" за допомогою схем та знаків, якщо він предствлений у словесній формі (див. рис. 2). Слід зазначити, що вміння виконувати знаково-символічну діяльність (заміщення, кодування, схематизація, моделювання) є важливими показниками засвоєння матеріалу, а отже і вміння його використовувати.

Поняття – це форма мислення про сукупність істотних та неістотних властивостей певного об'єкта (предмета).

Властивість – те, що притаманне предметам, що відрізняє їх від інших предметів чи робить схожими на інші предмети. Істотними (суттєвими) є властивості, без яких об'єкт (предмет) не може існувати. Неістотними є такі властивості об'єкта (предмета), які можуть належати або за деяких обставин не належати об'єкту (предмету), але відсутність яких не призведе до того, що даний об'єкт (предмет) перестане існувати. Розглянемо, наприклад, рівнобедрений трикутник ABC , зображений на рис. А.

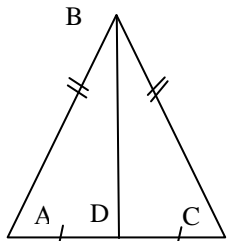


Рис. А

Його властивості: 1) сторони трикутника AB і BC рівні; 2) медіана BD перпендикулярна AC і ділить кут B навпіл – це істотні властивості цього трикутника. Властивості: 3) основа AC рівнобедреного трикутника ABC горизонтальна; 4) вершина рівнобедреного трикутника позначена буквою B – це неістотні властивості.

Атрибути поняття – це зміст та обсяг. *Обсяг поняття* – це множина об'єктів, які охоплюються цим поняттям. Так, коли говорять про математичний об'єкт – трикутник, то мають на увазі всі геометричні фігури, які є трикутниками. Множина всіх трикутників складає обсяг поняття про трикутник. Множина натуральних чисел складає обсяг поняття про натуральне число. *Зміст поняття* – це множина суттєвих спільних властивостей, притаманних усім об'єктам, що належать до поняття. Чим менший обсяг поняття, тим більший його зміст. Наприклад, обсяг поняття "рівнобедрений трикутник" менший за обсяг поняття "трикутник", або в обсяг першого поняття входять не всі трикутники, а лише рівнобедрені. А ось зміст першого поняття, очевидно, більший від змісту другого, оскільки рівнобедрений трикутник має не тільки властивості трикутника, але і особливі властивості, які властиві тільки рівнобедреним трикутникам. Якщо обсяг одного поняття A міститься в обсязі іншого поняття B ($A \in B$), то друге поняття називають родовим по відношенню до першого поняття, а перше називають видовим по відношенню до другого. Наприклад: арифметичні дії – додавання, віднімання, множення, ділення. Родове поняття – арифметичні дії. Видові поняття – додавання, віднімання, множення, ділення. У родо-видових відношеннях слід розрізняти найближчий рід і наступні родові ступені. Якщо між залежними поняттями не можна поставити ще одне поняття, то матимемо відношення найближчого роду і виду.

Процес виділення істотних властивостей об'єкта (предмета) та їх відокремлення від неістотних властивостей називають визначенням поняття. Словосполучення "визначення поняття" потрібно розуміти як діяльність із визначення поняття. Результати такої діяльності, як правило, виражають певною словесною конструкцією, яку називають означенням поняття, або дефініцією. *Означенням* називають речення, у якому в стислій формі за допомогою вже відомих понять і їхніх властивостей розкривається зміст нового поняття. Словесне позначення поняття називається *терміном*. Умовні позначення (*символи*) різних математичних понять

(операцій, функцій, відношень, тощо) – це *математичні знаки*. У математиці використовують різні способи означення понять. Найпоширеніший з них – означення через найближчий рід і видову відмінність. Наприклад, означення паралелограма: "Паралелограмом називають чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні". Це означення побудоване так: спочатку вказано назву об'єкта поняття, що визначається – паралелограм, а потім вказані його властивості: 1) паралелограм – це чотирикутник; 2) протилежні його сторони паралельні. Перша властивість – це зазначення того більш широкого поняття, до якого належить поняття, яке визначають. Це більш загальне поняття називається родовим по відношенню до поняття, яке визначають. У даному випадку родовим поняттям для паралелограма є чотирикутник. Друга властивість – це зазначення видової властивості, яка відрізняє паралелограм від інших видів чотирикутника. У геометрії часто використовують ще конструктивні означення, а в алгебрі – означення через перелік; умовні означення, заперечні означення та ін. У шкільному курсі математики вивчають три види понять: 1) первісні (неозначувані); 2) означувані; 3) поняття, які вводяться шляхом описування, на прикладах. Щоб будувати і відтворювати означення математичних понять правильно, потрібно знати основні вимоги до логічного означення понять. Це такі вимоги: 1) означення повинно бути науково правильним; 2) означення не повинно містити "порочного кола"; 3) означення має вказувати на найближче родове поняття; 4) означення не повинно бути тавтологією, тобто повторювати в іншій словесній формі та, що вже висловлене раніше; 5) означення повинне бути достатнім (в означенні повинні бути вказані всі ознаки, які дозволяють однозначно виділити об'єкти поняття, яке визначають); 6) означення не має бути надмірним (не повинні бути вказані зайві ознаки, які є наслідками інших ознак поняття, яке визначають).

Класифікація поняття — це логічна операція, за допомогою якої обсяг поняття ділять за якою-небудь ознакою на класи, а останні (вже за іншими ознаками) — на підкласи і т.д. *Систематизація поняття* — розміщення матеріалу у певному порядку, послідовності.

У методиці математики виділяються два методи введення понять: *конкретно-індуктивний* і *абстрактно-дедуктивний*. Ці методи визначаються логічними методами пізнання — індукцією і дедукцією.

Засвоєння математичних понять відбувається у процесі аналітико-синтетичної діяльності учнів, спрямованої на виділення суттєвих загальних властивостей певного поняття й усвідомлення несуттєвих властивостей, а також на застосування нового поняття до розв'язування задач. З погляду застосування понять важливу роль відіграють такі розумові дії, як "дія підведення під поняття" ("дія розпізнавання") та обернена їй дія — відшукування наслідків. Остання означає, що від факту належності об'єкта до поняття приходять до системи властивостей, які має цей об'єкт.

Рис. 2. Конспект у словесній формі

Одним із основним засобів стосовно розглядуваного у статті питання, ми визначаємо розв'язування методичних задач, які стосуються теми "Математичні поняття та методика їх формування". Систематичне розв'язування їх сприяє формуванню відповідних вмінь студентів. Наведемо приклади таких задач, до окремих із них наведемо відповіді або розв'язання.

Задача 1. Сформулюйте можливу мету розв'язування наступних вправ та розв'яжіть їх: 1) назвіть числа, обернені до таких чисел: 20 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $3\frac{1}{2}$; 1 ; 2) знайдіть суму числа $\frac{1}{4}$ і числа, оберненого до нього; 3) від числа 5 відніміть число, обернене до нього.

Відповідь. 1) $\frac{1}{20}$; 3 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{7}$. 2) $\frac{1}{4} + 4 = 4\frac{1}{4}$. 3) $5 - \frac{1}{5} = 4\frac{4}{5}$. Можлива мета: засвоєння нових термінів та символів, пов'язаних із поняттям числа, оберненого до даного.

Задача 2. Які з перелічених ознак є суттєвими для поняття "координатна пряма": 1) на прямій позначено початок відліку; 2) на прямій позначено одиничний відрізок; 3) на прямій позначено напрям; 4) пряма розташована горизонтально.

Відповідь. 1), 2), 3).

Задача 3. Які з прямих на рис. 3 є координатними прямими?

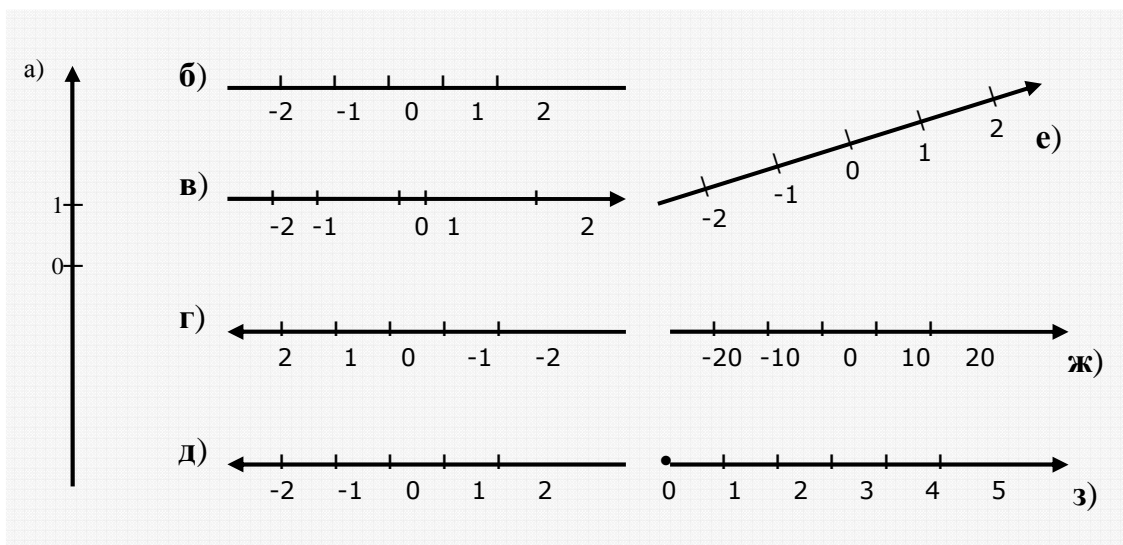


Рис. 3. Приклади прямих

Задача 4. Підберіть (придумайте) три вправи, які можна запропонувати учням для більш глибокого усвідомлення поняття "відношення".

Розв'язання. Можна запропонувати наступні вправи. 1) Придумайте два числа, відношення яких дорівнює одиниці. 2) Як зміниться величина попереднього числа (не змінюючи наступного), щоб відношення стало меншим за одиницю? 3) Якщо відношення двох чисел дорівнює $\frac{2}{3}$, то скільки буде дорівнювати відношення чисел, обернених до даних чисел?

Задача 5. Як відомо, підготовка учнів до сприйняття нової теми може бути проведена на уроці із вивчення даної теми, а також може бути розподілена протягом тривалого часу маленькими порціями на уроках, які передують вивченню теми. Якщо виходити із аналізу правил додавання додатних та від'ємних чисел, то доцільно завчасно підготувати учнів до оперування поняттями: "числа з однаковими (різними) знаками", "модуль числа", "знак числа, що має більший (менший) модуль" тощо та розвивати в учнів уміння для двох даних чисел визначати модуль кожного з них; яке число має більший модуль; який знак числа, що має більший модуль; а також вміння виконувати дії над модулями чисел. Чи можна, на Вашу думку, такі вміння виробити на одному уроці? У які формі можна формувати такі вміння? Заповніть таблицю 2.

Таблиця 2.

Вправи для формування вмінь оперувати із визначеними вище поняттями

a	b	Більший модуль	Число, що має більший модуль	Більше число
-4	5,2			
-8	4,2			
3,8	-1,6			

Задача 6. Виконайте дію "підведення під поняття" для квадратного рівняння. Які з рівнянь є квадратними: а) $4x - 2x^2 = 3$; б) $5x + 3 = 0$; в) $(x - 2) \cdot 3x = 0$; г) $x^2 + \frac{2}{x} + 5 = 0$; д) $x^2 - 3x^3 + 4 = 0$; е) $x^2 + \sqrt{x} + 5 = 0$?

Розв'язання. Квадратним рівнянням називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — невідоме, a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$. Виділимо істотні властивості: 1) бути рівнянням; 2) бути представленим у формі $ax^2 + bx + c = 0$, де x — невідоме, a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

а): квадратне рівняння, оскільки це рівняння, яке може бути представлено у формі $ax^2 + bx + c = 0$: $-2x^2 + 4x - 3 = 0$, де x — невідоме, $a = -2$, $b = 4$, $c = -3$;

б): не є квадратним рівнянням, оскільки не володіє властивістю 2;

в): квадратне рівняння, оскільки це рівняння, яке може бути представлено у формі $ax^2 + bx + c = 0$: $3x^2 - 6x = 0$, де x — невідоме, $a = 3$, $b = -6$, $c = 0$;

г) – е): не є квадратними рівняннями, оскільки не володіють властивістю 2.

Задача 7. Знайдіть та запишіть пропущені слова у формулюваннях означень тих окремих алгебраїчних понять, які повинен знати учень в основній школі:

- 1) _____ — це добуток чисел, змінних і їх степенів;
- 2) степенем числа a з натуральним показником n , більшим за 1, називається _____ n множників, кожен з яких дорівнює a ; степенем числа a з показником 1 називається саме число a ;
- 3) многочленом називається _____ кількох одночленів;
- 4) подібні члени многочлена — це _____, які відрізняються лише _____ або й зовсім не відрізняються;
- 5) якщо _____ значенню змінної x відповідає _____ значення змінної y , то таку відповідність називають функціональною відповідністю, або *функцією*;
- 6) _____ функцією називається функція, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — _____ змінна, k і b — будь-які числа;
- 7) _____ рівнянням із двома змінними називається рівняння виду $ax + by = c$, де x та y — змінні, a, b, c — числа (коефіцієнти рівняння);
- 8) розв'язком рівняння із двома змінними називається _____ значень змінних, при яких рівняння перетворюється у правильну _____ рівність;
- 9) розв'язком системи _____ рівнянь із двома змінними називається _____ значень змінних, при яких _____ рівняння системи перетворюється у правильну _____ рівність.

Задача 8. Для формування поняття одночлен учням можна пропонувати наступні вправи. Виконайте ці вправи та сформулюйте означення одночлена за одним із чинних підручників.

- 1) Які з виразів є одночленами: а) $3a$; б) $-3a$; в) $\frac{3}{4}ab$; г) $\frac{a}{b}$; д) $a + b$?
- 2) Перемножте задані числа та букви і скажіть як називається отриманий алгебраїчний вираз: а) $b, 2, a$; б) $-2, a, a, b$; в) a, a, a, b, b, b ; г) $\frac{3}{8}a, b, x$; д) $1, a$. Виокремте у кожному виразі буквену частину та числовий множник, що стоїть перед нею.
- 3) Визначте, чи завжди $2a$ більше за a ?
- 4) Напишіть загальний вид парного числа, кратного 3.
- 5) Напишіть загальний вид парного числа, кратного 5.
- 6) Визначте, чи завжди $2a$ — це парне число?
- 7) Яким буде число $2n - 1$, якщо n — натуральне число?
- 8) Чи можна сказати, що $n + 1$ — ціле число, якщо n — ціле?
- 9) Чи можна стверджувати, що an — ціле число, якщо n — ціле?
- 10) Чи можна сказати, що $4n$ приймає всі парні значення, якщо n — ціле?

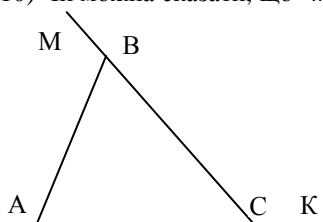


Рис. 4

Задача 9. На запитання, чи є кут ABM (рис. 4) зовнішнім кутом трикутника, учень відповів запереченням, а кут BCK назвав зовнішнім. Знайдіть помилку у відповіді та можливе джерело такої помилки.

Розв'язання. Учні часто помилково вважають, що всі зовнішні кути — це тупі кути, а розташовані вони справа. Можливе джерело таких сформованих неправильних асоціацій у тому, що: а) учні бачили зовнішні кути, які були лише тупими та зображені завжди саме в одному положенні — справа на рисунках; б) процес за-

пам'ятовування означення зовнішнього кута не пов'язувався із відповідними вправами.

Задача 10. Виконайте дію "підведення під поняття" для поняття "бісектриса кута". Для цього з'ясуйте, які лінії на рис. 5 (а, б, в, г, д, е, ж) є бісектрисами кутів. Відповідь обґрунтуйте.

Візьміть до уваги, що рівні кути на рисунках позначені однаково.

Розв'язання. Бісектрисою кута називається промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут навпіл. Потрібно перевірити такі істотні властивості: 1) бути променем; 2) виходити із вершини кута; 3) проходити між сторонами кута; 4) ділити кут навпіл. Ці властивості можна з'єднати сполучником "і", тому бісектрисою буде той об'єкт, що володіє кожною з цих властивостей одночасно.

5 (а): BC — бісектриса, бо це і промінь, і він виходить із вершини кута, і проходить між сторонами кута, і ділить кут навпіл;

5 (б): MO не є бісектрисою, бо не виходить із вершини кута; PO — бісектриса кута, бо виконуються всі чотири ознаки;

5 (в): MP — бісектриса, бо це і промінь, і він виходить із вершини кута, і проходить між сторонами кута, і ділить кут навпіл;

- 5 (г): FM не є бісектрисою, бо, наприклад, не є променем, а цього вже достатньо.
 5 (д): OM не є бісектрисою, бо не ділить кут навпіл;
 5 (е): OE не є бісектрисою, бо не ділить кут навпіл;
 5 (ж): OK — бісектриса, бо це і промінь, і він виходить із вершини кута, і проходить між сторонами кута, і ділить кут навпіл.

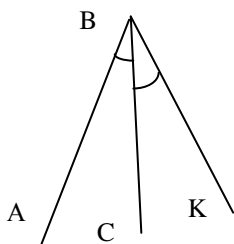


Рис. 5 (а)

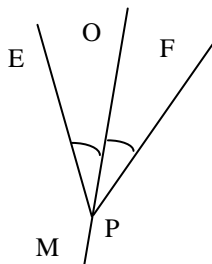


Рис. 5 (б)

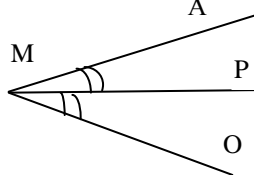


Рис. 5 (в)

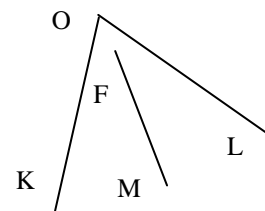


Рис. 5 (г)

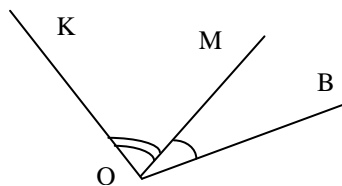


Рис. 5 (д)

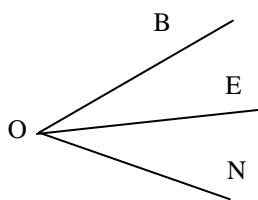


Рис. 5 (е)

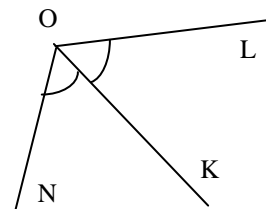


Рис. 5 (ж)

Студенти охоче намагаються розв'язувати методичні задачі, навіть формулювання таких задач викликає у студентів цікавість, проте багатьом складно дається знаходження розв'язку. Думаємо, причина у відсутності відповідної практики, оскільки мало існує добірок подібних задач у науково-методичній літературі. На закінчення зазначимо, що наш досвід свідчить, що розв'язування подібних методичних задач на заняттях, їх включення до варіантів контрольних робіт, до білетів на іспитах разом із використанням інших засобів, які визначені вище, є ефективним знаряддям набування студентами необхідних вмінь та навичок формувати в учнів математичні поняття.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Галузевий стандарт вищої освіти. Освітньо-кваліфікаційна характеристика бакалавра. — К.: Видання офіційне. Міністерство освіти і науки України. — 58 с.
2. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. — М.: Просвещение, 2002. — 224 с.

Матеріал надійшов до редакції 01.09. 2010 р.

Матяш О. И., Прус А. В. Отдельные аспекты формирования математических понятий.

В статье исследованы отдельные вопросы учебной деятельности студентов на занятиях методики обучения математики. Предложены средства для приобретения студентами умений и навыков формировать математические понятия у учеников. Среди них такие: проведение соответствующих дидактических игр, написание знаково-символических конспектов, решение методических задач, которые относятся к методике формирования конкретных понятий школьных курсов алгебры, геометрии.

Matyash O. I., Prus A. V. Some Aspects of Mathematical Notions Formation.

The article deals with some questions of educational activities of students during studies of methods of teaching mathematics. Means for getting skills and habits to form mathematical notions of pupils by students are offered in the article. Among them: conducting of the corresponding didactic games, writing of the sign-symbol notes, solving the methodical tasks, which refer to the methodology of the definite notions formation of school courses of algebra and geometry.